Corrigés

Chapitre 1 Divisibilité et nombres premiers

Avant de commencer

1 Réponses A et C.
Un entier multiple de 7 s'écrit sous la forme $7k$ avec k entier.
Un entier précédant un multiple de 7 s'écrit donc sous la forme $7k - 1$ (réponse C).
Comme $7k - 1 = 7(k - 1) + 6$, la réponse A est également correcte.
La réponse B : $7(k - 1)$ désigne par contre un multiple de 7.
La réponse D : $7k + 8 = 7(k + 1) + 1$ désigne un entier qui suit immédiatement un multiple de 7.

2 Réponses A et C.
$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne contiennent que des entiers. $\mathbb{N}$ contient les entiers positifs ou nuls. $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs) contient tous les entiers. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels et l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels contiennent des nombres tels que le nombre $\frac{1}{3}$ qui ne sont pas des entiers.

3 Réponse B.
Pour un entier n, $9n + 6 = 3(3n + 2)$. Comme $3n + 2$ est un entier, l'entier $9n + 6$ est toujours multiple de 3 (réponse B). Par contre avec $n = 1$, on a : $9n + 6 = 15$ qui n'est multiple ni de 6, ni de 9, ni de 2, ce qui invalide les autres réponses.

4 Réponses A et C.
Pour tout entier n, $\cos(2\pi n) = 1$, la réponse A est donc correcte.
Si l'entier n est pair, $\frac{n}{2}$ est un entier et $\frac{n(n+1)}{2}$ est donc entier. Si l'entier n est impair, l'entier $n + 1$ est pair et $\frac{n+1}{2}$ est entier ainsi que $\frac{n(n+1)}{2}$.
La réponse C est donc exacte. $\sqrt{2}$ n'est pas entier (car aucun entier n'a un carré égal à 2) et le nombre $\frac{n}{3}$ n'est par exemple pas entier avec $n = 1$.

5 Réponse B.
$24 = 5 \times 4 + 4$. Comme 4 est un entier compris entre 0 et $4 = 5 - 1$, cet entier est le reste de la division euclidienne de 24 par 5.

6 Réponses B et C.
Le reste d'une division euclidienne par 7 est un entier compris entre 0 et 6.

7 Réponse C.
1 a un unique diviseur positif (à savoir 1). 0 en a une infinité.
2 a pour seuls diviseurs positifs les entiers 1 et 2. 10 en a 4 (1, 10, 2 et 5).

8 Réponses B, C et D.
n est divisible par 9 signifie qu'il existe un entier k tel que $9k = n$.
Donc $\frac{n}{9} = k$ est entier (réponse D) ; $n = 3 \times 3k$ est multiple de 3 (réponses B et C). Par contre $\frac{9}{n}$ n'est par exemple pas entier avec $n = 18$ qui est divisible par 9 : la réponse A est incorrecte.

9 Réponses C et D.
$17^3 - 7^3 = 4\,570 = 2 \times 5 \times 457$: les réponses C et D sont donc correctes. Par ailleurs $4\,570 = 268 \times 17 + 14$: la réponse A est incorrecte ; et $4\,570 = 7 \times 652 + 6$: la réponse B est également fausse.

10 $737 = 700 + 30 + 7 = 7 \times 100 + (7 \times 4 + 2) + 7$
$= 7 \times 100 + 7 \times 4 + 7 \times 1 + 2 = 105 \times 7 + 2.$
737 est le dividende, 7 est le diviseur, 105 est le quotient, 2 est le reste.

11 On divise l'entier par 2.
Si le reste est 0, l'entier est pair. Si le reste est 1, l'entier est impair.

12 Les entiers s'écrivant sous la forme $3k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sont les multiples de 3. D'après un critère de divisibilité souvent rencontré dans les classes antérieures, ce sont les entiers dont la somme des chiffres (en écriture décimale) est également un multiple de 3.
On peut également caractériser ces entiers par le fait que leur reste dans la division euclidienne par 3 est 0.

Attention *Il se peut que la correction page 140 du manuel soit fausse (l'énoncé indique que k appartient à $\mathbb{Z}$, pas à $\mathbb{Q}$).*

13 La liste des entiers naturels diviseurs de 30 est :
1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 5 ; 10 ; 15 ; 30.

14 Les couples $(x ; y)$ solutions vérifient $y = 1 - 2x$.
En donnant à x une valeur entière, $1 - 2x$ sera entier.
On trouve ainsi facilement dix couples d'entiers solutions.

Pour faire le point

141 Réponse B.
Si $n - 3$ divise $5n + 2$, alors $n - 3$ divise $(5n + 2) - 5(n - 3) = 17$: la réponse B est correcte.
Si $n = 20$, alors $n - 3 = 17$ et $5n + 2 = 102$.
Comme $102 = 6 \times 17$, $n - 3$ divise $5n + 2$. Mais 17 ne divise pas 13 : la réponse A est fausse.
Si $n - 3 = -17$, alors $n - 3$ divise $5n + 2$ mais n ne divise pas 20 : la réponse C est fausse.
Si $n = 4$, alors $n - 3 = 1$ donc $n - 3$ divise $5n + 2$, mais 17 ne divise pas $n - 3$: la réponse D est fausse.

142 Réponse A.
L'équation s'écrit aussi $(x + 5y)(x - 5y) = 101$.
Soit $(x ; y)$ un couple d'entiers positifs solution de l'équation.
Comme $x + 5y$ est positif et que le produit de $x + 5y$ et de $x - 5y$ est le nombre 101 positif, l'entier $x - 5y$ est aussi positif.
Comme y est positif on a $x - 5y \leqslant x + 5y$. Finalement, le nombre 101 étant premier, on a : $x + 5y = 101$ et $x - 5y = 1$.
On a donc nécessairement $x = 51$ et $y = 10$.
On vérifie, réciproquement, que ce couple (51 ; 10) est bien une solution.
La réponse A est donc la réponse correcte.

143 Réponse C.
$2\,012 = bq + 666$ et $b > 666$. On a donc $bq = 1\,346$. b est donc un diviseur de 1 346 (il y en a quatre : 1, 1 346, 2 et 673).
La condition $b > 666$ nous restreint aux valeurs 673 et 1 346.
On vérifie réciproquement que ces deux valeurs conviennent.
La bonne réponse est C.

144 Réponse D.
En effet $1 = 0 \times 4 + 1$ et $1 = 0 \times 5 + 1$. Donc le reste de la division de 1 par 4 ou par 5 est 1 et aucun entier inférieur à 1 ne peut donner pour reste 1 dans ces divisions.

Attention *Il se peut qu'il manque le mot « petit » dans l'énoncé de certains manuels : « n est le plus petit entier positif ayant… ».*

145 Réponses A et B.
Si $n \equiv 0\ (4)$, alors $n^2 \equiv 0\ (4)$. Si $n \equiv 1\ (4)$, alors $n^2 \equiv 1\ (4)$.
Si $n \equiv 2\ (4)$, alors $n^2 \equiv 0\ (4)$. Si $n \equiv 3\ (4)$, alors $n^2 \equiv 1\ (4)$.
Les formes A et B sont donc les seules possibles.

146 Réponse B.
On peut écrire p sous la forme $p \times 1$: la réponse D est incorrecte.
Si p est premier, les diviseurs positifs de p^3 sont $1, p, p^2$ et p^3.
p^3 a donc 8 diviseurs dans $\mathbb{Z}$: la réponse B est correcte.
Si $p = 2$, alors $p + 1 = 3$ est également premier : la réponse A est donc fausse.
Si $p = 2$, alors p admet un diviseur entre $\sqrt{2}$ et 2 : la réponse C est incorrecte.

147 **Réponse A.**
2 et 199 sont premiers donc $n = 2^3 \times 199^2$ admet $4 \times 3 = 12$ diviseurs positifs.

148 **Réponse A.**
$A(n) = (n^2 + 3)(n^2 + 7)$.
Comme les deux facteurs sont strictement plus grands que 1, $A(n)$ est toujours composé.
La bonne réponse est A.

149 **Réponse B.**
L'entier $x_0 = 2$ est une solution de l'équation.
Cette équation s'écrit donc aussi sous la forme $2x \equiv 2x_0\,(3)$.
Si x est une solution, on a $2(x - x_0) \equiv 0\,(3)$, donc 3 divise $2(x - x_0)$.
Le nombre premier 3 est donc un facteur premier de $2(x - x_0)$ donc de $(x - x_0)$. Donc x s'écrit sous la forme $x_0 + 3k$, k entier. Réciproquement, on vérifie que tout entier de cette forme est une solution.
La réponse B est donc exacte. La réponse D est incorrecte.
La réponse A est incorrecte puisque par exemple $2 + 3 = 5$ est une autre solution.
La réponse C est incorrecte puisque par exemple l'entier 5, qui est une solution, ne s'écrit pas sous la forme $2 + 7k$.

150 **Réponse C.**
On vérifie que $13^4 \equiv 1\,(10)$. On a alors 4 cas.
Si $n \equiv 0\,(4)$, c'est-à-dire si $n = 4k$ (k entier naturel) : $13^n = (13^4)^k \equiv 1^k\,(10)$.
Le chiffre des unités est donc 1.
Si $n \equiv 1\,(4)$, c'est-à-dire si $n = 4k + 1$: $13^n = (13^4)^k \times 13 \equiv 13 \equiv 3\,(10)$.
Le chiffre des unités est 3.
Si $n \equiv 2\,(4)$, c'est-à-dire si $n = 4k + 2$: $13^n = (13^4)^k \times 13^2 \equiv 13^2 \equiv 9\,(10)$.
Le chiffre des unités est 9.
Si $n \equiv 3\,(4)$, c'est-à-dire si $n = 4k + 3$: $13^n = (13^4)^k \times 13^3 \equiv 13^3 \equiv 7\,(10)$.
Le chiffre des unités est 7.

151 **Réponse A.**
$8 \equiv 1\,(7)$ et $6 \equiv -1\,(7)$ donc $8^n - 6^n \equiv 1^n - (-1)^n\,(7)$ et $8^n - 6^n$ est donc congru à 0 modulo 7 si, et seulement si, n est pair.

152 **Réponses B, C et D.**
La somme des chiffres de cet entier n est $2k$. n est multiple de 3 si, et seulement si, $2k$ est multiple de 3, donc si, et seulement si, k est multiple de 3.

Chapitre 3 Fonctions trigonométriques et dérivation

Avant de commencer

1 Réponses B et D.
f n'est pas dérivable en 0 : la réponse A est fausse.
f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{2x}$: les réponses B et D sont justes, la réponse C est fausse.

2 Réponses B et C.
g est de la forme u^2 avec $u(x)=3x+1$ et $u'(x)=3$.
Sa dérivée est $g'=2u'u$ donc :
$$g'(x)=2\times 3(3x+1)=6(3x+1)=18x+6.$$
Les réponses B et C sont justes, les réponses A et D sont fausses.

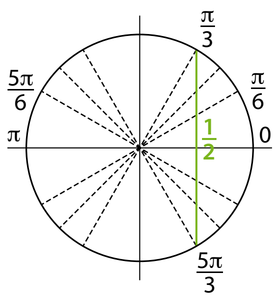
3 Réponse D.
h est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x)=x^2+3$ et $u'(x)=2x$.
Sa dérivée est $h'=\dfrac{-u'}{u^2}$, donc $h'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$.
La réponse D est juste, les réponses A, B et C sont fausses.

4 Réponses A et D.
$\cos(-x)=\cos x$: la réponse A est juste, la réponse B est fausse.
$\cos(x+\pi)=-\cos x$: la réponse C est fausse.
$\cos(-x+2\pi)=\cos(-x)$: la réponse D est juste.

5 Réponses B et D.
$\cos(x+\pi)=-\cos x$: les réponses A et C sont fausses, la réponse B est juste.
$\cos(\pi-x)=\cos(x+\pi)=-\cos x$: la réponse D est juste.

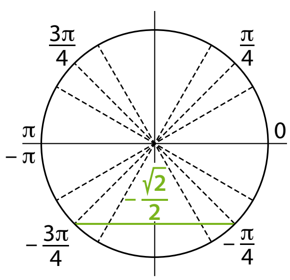
6 Réponses B et D.
Sur $[0\,;\pi]$, $\sin x\geqslant 0$: les réponses A et C sont fausses.
Les réponses B et D sont justes.

7 Réponses B et C.
On trace le cercle trigonométrique.



- $-\dfrac{\pi}{3}$ n'appartient pas à $[0\,;2\pi[$: la réponse A est fausse.
- $\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{10\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{3}$.
$\cos\dfrac{\pi}{3}=\cos\dfrac{5\pi}{3}=0{,}5$ et $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$ appartiennent à $[0\,;2\pi[$: les réponses B et C sont justes.
- $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\neq 0{,}5$: la réponse D est fausse.

8 Réponses A et D.
On trace le cercle trigonométrique.

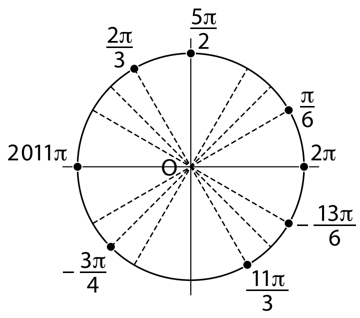


- $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{4}$ et $-\dfrac{3\pi}{4}$ appartiennent à $]-\pi\,;\pi]$: la réponse A est juste.
- $\dfrac{5\pi}{4}$ n'appartient pas à $]-\pi\,;\pi]$: la réponse B est fausse.
- $\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\neq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: la réponse C est fausse.
- $\dfrac{5\pi}{4}-2\pi=-\dfrac{3\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}-2\pi=-\dfrac{\pi}{4}$: la réponse D est juste.

9 Réponses B et C.
$\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=-0{,}5$: la réponse A est fausse et la réponse B est juste.
$\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: la réponse C est juste et la réponse D est fausse.

10 **1.** $f'(x)=\dfrac{-9x+2}{2\sqrt{x}}$ **2.** $f'(x)=\dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$

11 Pour les 1re et 6e colonnes :
$\cos(2\pi)=1$; $\cos(2\,011\pi)=-1$; $\sin(2\pi)=0$ et $\sin(2\,011\pi)=0$.



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{13\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

12

	Dans $]-\pi\,;\pi]$	Dans $[0\,;2\pi[$
a. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$S=\left\{\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right\}$	$S=\left\{\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right\}$
b. $\sin x=-0{,}5$	$S=\left\{-\frac{\pi}{6}\,;-\frac{5\pi}{6}\right\}$	$S=\left\{\frac{7\pi}{6}\,;\frac{11\pi}{6}\right\}$
c. $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$S=\left\{\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{5\pi}{6}\right\}$	$S=\left\{\frac{5\pi}{6}\,;\frac{7\pi}{6}\right\}$

Pour faire le point

120 Réponse C.
f est de la forme u^3 avec $u(x)=-x^2+1$ et $u'(x)=-2x$.
Sa dérivée est $f'=3u'u^2$ donc :
$$f'(x)=3(-2x)(-x^2+1)^2=-6x(-x^2+1)^2.$$
La réponse C est juste, les réponses A, B et D sont fausses.

121 Réponses A et C.
f est de la forme $\dfrac{1}{u^3}$ avec $u(x)=3-x$ et $u'(x)=-1$.
Sa dérivée est $f'=\dfrac{-3u'}{u^{3+1}}$ donc :
$$f'(x)=\frac{-3(-1)}{(3-x)^4}=\frac{3}{(3-x)^4}=3(3-x)^{-4}.$$
Les réponses A et C sont justes, les réponses B et D sont fausses.

122 Réponses A et D.
$f(x)=\cos(2x)+\cos^2(x)$
$f'(x)=2(-\sin(2x))+2(-\sin x)\cos x$
- Comme $2\sin x\cos x=\sin(2x)$:
$$f'(x)=-2\sin(2x)-\sin(2x)=-3\sin(2x).$$
La réponse A est juste.
- $f'(x)=-2\sin(2x)-2\sin x\cos x$.
Les réponses B et C sont fausses.
- Comme $2\sin x\cos x=\sin(2x)$,
$f'(x)=-2\sin(2x)-2\sin x\cos x$
$=-4\sin x\cos x-2\sin x\cos x=-6\sin x\cos x$.
La réponse D est juste.

123 **Réponse C.**

f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 2 + \sin x$ et $u'(x) = \cos x$.

$f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $u'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}}$: la réponse C est juste, les réponses A, B et D sont fausses.

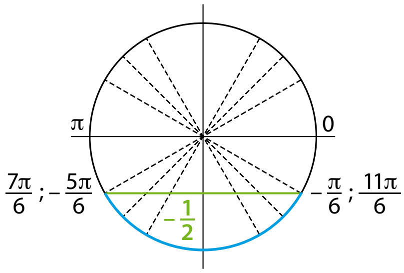
124 **Réponses A et B.**

$f(x) = v(-x)$ donc $f'(x) = -v'(-x)$: la réponse B est juste, la réponse C est fausse.

Comme $v'(x) = -v(x)$, $f'(x) = -(-v(-x)) = v(-x)$: la réponse A est juste, la réponse D est fausse.

125 **Réponses A et C.**

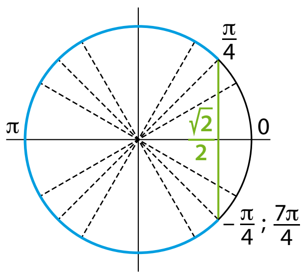
$2\sin x + 1 < 0$ équivaut à $\sin x < -0{,}5$.



Les réponses A et C sont justes.
Les réponses B et D sont fausses.

126 **Réponses C et D.**

$\sqrt{2} - 2\cos x \geqslant 0$ équivaut à $\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Les réponses C et D sont justes.
Les réponses A et B sont fausses.

127 **Réponse D.**

Sur $[0\,;\pi]$, $\sin x \geqslant 0$ et sur $[\pi\,;2\pi]$, $\sin x \leqslant 0$.
Pour tout réel x, $1 + \cos x \geqslant 0$: la réponse A est fausse.
Pour tout réel x, $\cos x - 1 \leqslant 0$: la réponse B est fausse.
Pour tout réel x, $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$ donc $\cos^2 x - 1 \leqslant 0$: la réponse C est fausse.
$\sin^2(x) + \sin x = \sin x(\sin x + 1)$. Comme $\sin x + 1 \geqslant 0$: la réponse D est juste.

128 **Réponses A et D.**

$f(-x) = 2(-x) + \sin(-2x) = -2x - \sin(2x)$.
$f(-x) = -(2x + \sin(2x))$: la réponse A est juste et la réponse C est fausse.
$f(x+\pi) = 2(x+\pi) + \sin(2x+2\pi) = 2x + 2\pi + \sin(2x)$
donc $f(x+\pi) = f(x) + 2\pi$: la réponse B est fausse et la réponse D est juste.

129 **Réponses A et C.**

- $f(-x) = -f(x)$ donc $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère : la réponse A est juste et la réponse B est fausse.
- Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1$ donc $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 2x + 1$: la réponse C est juste.
- Pour tout réel x appartenant à $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, $2x$ appartient à $]\pi\,;2\pi[$ et donc $\sin(2x) < 0$: $f(x) - 2x < 0$ et donc $f(x) < 2x$: la réponse D est fausse.

130 **Réponse A.**

$g(x) = \dfrac{f(x)}{2x} = 1 + \dfrac{\sin(2x)}{2x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}(2x) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\sin X}{X} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{2x} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 2$: la réponse A est juste, les réponses B, C et D sont fausses.

131 **Réponses A et C.**

$f'(x) = 2 + 2\cos(2x)$.

- Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(2x) \leqslant 1$ donc $-2 \leqslant 2\cos(2x) \leqslant 2$ donc $0 \leqslant f'(x) \leqslant 4$.
Pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$: la réponse A est juste.
- $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$: la réponse B est fausse.
- $f'(x) = 0$ pour $\cos(2x) = -1$ et donc pour $2x = \pi + k2\pi$ c'est-à-dire pour $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif : la réponse C est juste.
- $g'(x) = 2x - 2(-\sin(2x)) = 2x + 2\sin(2x) \neq f(x)$: la réponse D est fausse.

Chapitre 8 Géométrie dans l'espace

Avant de commencer

1 Réponse C.
La droite (AB) est incluse dans le plan (ABC) et la droite (EG) est incluse dans le plan (EFG). Ces deux plans sont strictement parallèles donc les droites (AB) et (EG) ne sont pas sécantes.
La parallèle à (AB) passant par E est la droite (EF), or le point G n'appartient pas à (EF) donc les droites (AB) et (EG) ne sont pas parallèles. Les droites (AB) et (EG) ne sont ni sécantes ni parallèles, donc ces droites sont non coplanaires.

2 Réponses A et D.
Les segments [EC] et [AG] sont deux diagonales du cube, ils se coupent donc en O, centre du cube. Les droites (EC) et (AG) sont donc sécantes, donc en particulier coplanaires.

3 Réponses B et D.
Les diagonales [EC] et [HB] du quadrilatère EHCB sont des diagonales du cube, elles se coupent donc en leur milieu et EHCB est un parallélogramme. Les droites (HC) et (EB) sont parallèles, donc en particulier coplanaires.

4 Réponses B et C.
Comme précédemment, on démontre que les droites (DG) et (AF) sont parallèles donc F appartient au plan (ADG), ce qui prouve que les plans (ADG) et (GFA) sont confondus donc aussi parallèles.

5 Réponse B.
La droite (FG) est strictement parallèle aux plans (ABC) et (ADH).
La droite (FG) est sécante en G au plan (DCG).
ADGF est un parallélogramme de centre O donc les points F et G appartiennent au plan (AOD), la droite (FG) est donc incluse dans le plan (AOD).

6 Réponses A, B et C.
La droite (BG) est sécante au plan (ADC) en B.
Le plan (DOE) est aussi le plan (DCF) donc la droite (BG) est sécante au plan (DOE) en I, centre de la face BFCG.
Le plan (AEC) est aussi le plan (AEG), donc la droite (BG) est sécante au plan (AEC) en G.
La droite (BG) est incluse dans le plan (BCG) qui est parallèle au plan (ADE), donc la droite (BG) est parallèle au plan (ADE).

7 Réponses B et D.
Comme ABCD est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$
La proposition B est donc juste et comme les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ ne sont pas égaux, la proposition A est fausse.
Si $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$ pour tout point M, cette égalité est en particulier vraie pour M = O soit $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OO} = \vec{0}$, le point O serait alors le milieu de [AB], la proposition C est donc fausse.
Comme O est le milieu de [CA], $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$: la proposition D est juste.

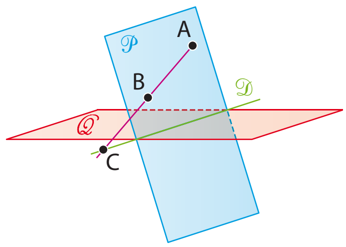
8 Réponses A et D.
La proposition A est juste : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
La proposition B est fausse. Contre-exemple : soit AEDC un parallélogramme non aplati et B le milieu de [AE], $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et A, B, C et D ne sont pas alignés.
La proposition C est fausse sinon ABCD serait un parallélogramme et on aurait $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
La proposition D est juste :
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$
or $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BA}$ soit :
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}.$$

9 Réponses B et C.
$\overrightarrow{AB}(6\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}(x_D - 4\,; y_D - 1)$. Comme ABDC est un parallélogramme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc $\begin{cases} x_D - 4 = 6 \\ y_D - 1 = 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_D = 10 \\ y_D = 3 \end{cases}$ et D(10 ; 3).
I est le milieu de [BC] donc $x_I = \frac{8+4}{2} = 6$ et $y_I = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$ soit I(6 ; 2,5).

10 Réponse C.
$6\vec{u} + 5\vec{v}(-17\,;-8)$; $7\vec{u} + 10\vec{v}(1\,;-26)$; $2\vec{u} + 3\vec{v}(1\,;-8)$ et $-3\vec{u} - 4\vec{v}(1\,;10)$.

11 La droite Δ est parallèle à la droite (BC) qui est incluse dans le plan (BCD), donc Δ est parallèle au plan (BCD).

12 Supposons que le point C existe. La droite (AB) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ et C appartient à la droite (AB), donc C appartient à $\mathcal{P}$. Comme C appartient également au plan $\mathcal{Q}$, C appartient à la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, c'est-à-dire $\mathcal{D}$. Il s'agit donc du point d'intersection des droites (AB) et $\mathcal{D}$.



13
$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} \\ &= 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= -4\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= -4(0{,}25\overrightarrow{AB} + 0{,}25\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}. \end{aligned}$$

14 $2\vec{u}(8\,;4)$ et $-3\vec{v}(21\,;-9)$ donc $2\vec{u} - 3\vec{v}(29\,;-5)$.
Soit M(x ; y), alors $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ équivaut à :
$$\begin{cases} x + 1 = 29 \\ y - 3 = -5 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = 28 \\ y = -2 \end{cases}$$

Pour faire le point

134 Réponses B et C.
HFBD étant un parallélogramme, les droites (BD) et (HF) sont parallèles. La proposition B est donc juste.
Les droites (EH) et (FG) étant sécantes à la droite (HF) respectivement en H et F, les droites (EH) et (FG) ne sont pas parallèles à la droite (BD). Les propositions A et D sont donc fausses.
La droite (BD) est parallèle à la droite (HF) et (HF) est incluse dans le plan (EFG) donc (BD) est parallèle au plan (EFG) : la proposition C est exacte.

135 Réponse A.
Proposition A : Les points A, E et G sont équidistants des points B et D donc (AEG) est le plan médiateur du segment [DB], en particulier (AEG) est donc bien perpendiculaire à la droite (DB).
Proposition B : Dans le plan (ABC), la droite (AC) n'est pas orthogonale à la droite (BC), or (AC) est incluse dans le plan (AEG) donc (BC) n'est pas perpendiculaire au plan (AEG).

Proposition C : Le quadrilatère ABGH est un parallélogramme mais comme AB ≠ BG, ABGH n'est pas un losange donc ses diagonales ne sont pas perpendiculaires. La droite (AG) est incluse dans le plan (AEG) et (BH) n'est pas orthogonale à la droite (AG) donc (BH) n'est pas perpendiculaire au plan (AEG).

Proposition D : Par un raisonnement identique à celui fait pour la proposition B, on démontre que (AEG) n'est pas perpendiculaire à la droite (AB).

136 **Réponses A et B.**

Les segments [AH], [HC], [AF] et [FC] sont les diagonales de carrés de même coté donc AH = HC d'une part et AF = FC d'autre part. Les points H et F sont donc équidistants des points A et C donc H et F appartiennent au plan médiateur de [AC].

Comme E et C ne sont pas équidistants de A et C, E et C n'appartiennent pas au plan médiateur de [AC].

137 **Réponse A.**

Le plan médiateur du segment du segment [DE] est le plan (AHG), donc la section du cube par ce plan est le quadrilatère ABGH.

ABGH est un parallélogramme car ses diagonales [AG] et [BH] se coupent en leur milieu O, centre du cube. Comme AB ≠ BG, par élimination, on en déduit que le quadrilatère ABGH est un rectangle. On peut aussi le justifier en remarquant que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (BFG) donc à la droite (BG).

138 **Réponse A.**

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ n'étant pas coplanaires, le point G n'appartient à aucun des trois plans (ABC), (ACD) et (ABD). Les propositions B, C et D sont donc fausses.

Par élimination, on peut déduire que la proposition A est exacte. On peut aussi le démontrer en considérant les points I et J milieux respectifs des segments [AD] et [BC]. On a donc $4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ donc :

$$4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$$

soit $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$, ce qui prouve que G est le milieu de [IJ] donc que les points I, J et G sont alignés.

139 **Réponse B.**

$\overrightarrow{OA}(1\,;-2\,;1)$, $\overrightarrow{AC}(-6\,;-10\,;4)$, $\overrightarrow{AD}(6\,;-10\,;4)$ et $\overrightarrow{AE}(\sqrt{2}-1\,;2\,;-1)$.

Parmi les triplets de coordonnées précédents, seul $(-6\,;-10\,;4)$ est proportionnel au triplet $(3\,;5\,;-2)$ des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Par conséquent, seul le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

140 **Réponses A, C et D.**

$\overrightarrow{AB}(1\,;3\,;1)$, $\overrightarrow{AC}(1\,;-2\,;3)$ et $\overrightarrow{AD}(3\,;4\,;5)$.

$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont donc coplanaires, donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

D'autre part, deux vecteurs sont toujours coplanaires donc les propositions C et D sont justes.

141 **Réponses C et D.**

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Proposition A.

La relation $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est équivalente au système :

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a + 2b = -4 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \text{ soit à } \begin{cases} a - 2b = 0 & \\ 4b = -4 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -3b = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \text{ soit à } \begin{cases} a + 2b = 0 \\ b = -1 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

La proposition A est fausse.

Proposition B.

On obtient de la même façon les systèmes équivalents :

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a + 2b = -4\,; \\ 2a + b = 2 \end{cases} \begin{cases} a - 2b = 0 & \\ 4b = -4 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -3b = 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a + 2b = 0 \\ b = -1 \\ b = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

La proposition B est fausse.

Proposition C.

On obtient de la même façon les systèmes équivalents :

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a + 2b = -4\,; \\ 2a + b = 3 \end{cases} \begin{cases} a - 2b = 0 & \\ 4b = -4 & \text{et } L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -3b = 3 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \begin{cases} a + 2b = 0 \\ b = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

On obtient alors $a = 2$ et $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ donc la proposition C est juste.

Proposition D. On peut procéder de la même façon ou remarquer que :

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

142 **Réponses A et B.**

Notons (d) la parallèle à (BC) passant par A.

Proposition A : Comme $\overrightarrow{BC}(2\,;-2\,;2)$ et $\vec{u}(1\,;-1\,;1)$ sont colinéaires, (d) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec t réel quelconque.

La proposition A est juste.

Proposition B : Le point E$(-2\,;5\,;-2)$ appartient à la droite (d) car il s'agit du point de paramètre -3 de la représentation paramétrique précédente. De plus le vecteur $\vec{v}(-2\,;2\,;-2)$ est colinéaire à $\vec{u}$. La proposition B est donc juste.

Proposition C : Le vecteur $\vec{w}(1\,;2\,;1)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ donc cette proposition est fausse.

Proposition D : Le point B$(1\,;1\,;1)$ n'appartient pas à (d) car le système

$$\begin{cases} 1 = 1 + t \\ 1 = 2 - t \\ 1 = 1 + t \end{cases} \text{ est équivalent à } \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases} \text{ donc n'a pas de solution.}$$

La proposition D est fausse.

143 **Réponses B et C.**

On résout le système $\begin{cases} -3 = -3 + 4t \\ 5 = 5t \\ 2 = 2 - t \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$ donc ce système n'a pas de solution. La proposition A est fausse.

B est le point de paramètre $t = 0$. La proposition B est juste.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}(4\,;5\,;-1)$ et $\vec{v}(4\,;0\,;-1)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ donc la proposition C est juste et la proposition D est fausse.

Attention *Dans le corollaire en bas de la page 234, il faut lire : « Si deux droites **sécantes** d'un plan $\mathcal{P}$ sont respectivement **parallèles** à deux droites d'un plan $\mathcal{Q}$, alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles ».*

Chapitre 10 Probabilités conditionnelles

Avant de commencer

Pour les questions 1 à 5, le tableau suivant donne l'ensemble de tous les tirages possibles (il y a en tout 25 possibilités) :

Boule 2 / Boule 1	1	2	3	4	5
1	11	12	13	14	15
2	21	22	23	24	25
3	31	32	33	34	35
4	41	42	43	44	45
5	51	52	53	54	55

1 Réponses B et C.
Il suffit de regarder la boule qui correspond au chiffre des unités : il y a deux chances sur cinq pour que cette boule ait un numéro pair.
La probabilité cherchée est donc $\frac{2}{5}$.
La probabilité cherchée est aussi $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.

2 Réponse C.
Le nombre obtenu est multiple de trois lorsque la somme des numéros des deux boules est un multiple de trois. Cela correspond aux 9 résultats suivants : 12, 15, 21, 24, 33, 42, 45, 51 et 54.
La probabilité cherchée est donc $\frac{9}{25}$.

3 Réponse B.
La somme des numéros tirés est 6 pour les 5 résultats suivants : 15, 24, 33, 42 et 51.
La probabilité cherchée est donc $\frac{5}{25}$, soit $\frac{1}{5}$.

4 Réponse D.
Le nombre obtenu est pair et multiple de trois pour les 4 résultats suivants : 12, 24, 42 et 54 ; cela correspond aux nombres multiples de 6.
La probabilité cherchée est donc $\frac{4}{25}$, soit 0,16.

5 Réponses C et D.
On peut utiliser la formule : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Ainsi, $P(A \cup B) = \frac{10}{25} + \frac{9}{25} - \frac{4}{25} = \frac{15}{25}$.
La probabilité cherchée est donc $\frac{15}{25}$, soit $\frac{3}{5}$.

6 Réponses B et D.
La probabilité cherchée est $0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}008 = \frac{1}{125}$.

7 Réponse C.
L'événement cherché correspond aux résultats SSE, SES et ESS.
On a : $P(\text{SSE}) = P(\text{SES}) = P(\text{ESS}) = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}032$.
La probabilité cherchée est donc $3 \times 0{,}032 = 0{,}096$.

8 Réponses A et C.
L'événement contraire de « Obtenir au moins un succès au cours des trois répétitions de l'expérience » est « Obtenir trois échecs au cours des trois répétitions de l'expérience ».
La probabilité de cet événement est $0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}512 = \frac{64}{125}$.
La probabilité cherchée est donc $1 - \frac{64}{125} = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$.

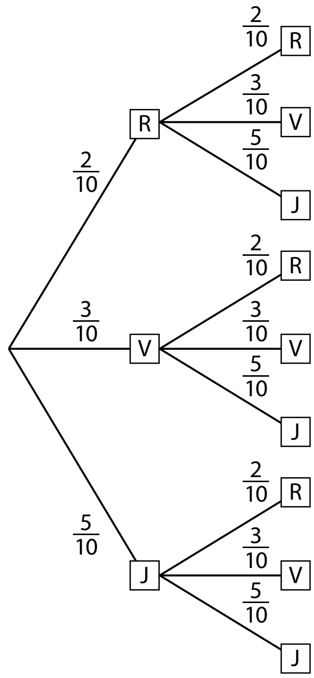
9 $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$; $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$;

$P(C) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$; $P(\bar{C}) = 1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$;

$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$; $P(A \cup B) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$;

$P(A \cap C) = 0$; $P(A \cup C) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

10 1. **1re boule** **2de boule**



2. Probabilité d'obtenir :
– 2 boules rouges : $\frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{100}$;
– 2 boules vertes : $\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$;
– 2 boules jaunes : $\frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$;
– 2 boules de même couleur : $\frac{4}{100} + \frac{9}{100} + \frac{25}{100} = \frac{38}{100} = 0{,}38$.

3. L'événement « Obtenir exactement une boule rouge » correspond aux tirages RV, RJ, VR et JR. La probabilité cherchée est donc :

$$\frac{6}{100} + \frac{10}{100} + \frac{6}{100} + \frac{10}{100} = \frac{32}{100} = 0{,}32\,.$$

4. La probabilité de n'obtenir aucune boule rouge est : $\frac{8}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{64}{100}$.
La probabilité cherchée est donc $1 - \frac{64}{100} = \frac{36}{100} = 0{,}36$.

Pour faire le point

65 Réponse C.
La formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ permet d'écrire :
$$0{,}80 = 0{,}35 + 0{,}75 - P(A \cap B)$$
soit $P(A \cap B) = 0{,}30$.

66 Réponse A.
$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}30}{0{,}35} = \frac{6}{7}$.

67 Réponse A.
$P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

68 Réponses A et C.
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$ (voir tableau ci-contre), soit $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

	A	$\bar{A}$
B	$A \cup B$	
$\bar{B}$		$\bar{A} \cap \bar{B}$

69 Réponse B.
On peut lire sur l'arbre :
$$P_A(C) = 0{,}3 \text{ et } P_A(D) = 0{,}6.$$
Ainsi, $P_A(E) = 1 - 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}1$.

70 **Réponse B.**

$P(B\cap C)=P(B)\times P_B(C)=0{,}6\times 0{,}2=0{,}12.$

71 **Réponse B.**

$P(A)=1-0{,}6=0{,}4$. Ainsi, $P(A\cap C)=0{,}4\times 0{,}3=0{,}12$.

D'où $P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)=0{,}12+0{,}12=0{,}24$.

72 **Réponse D.**

$P_C(A)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(C)}=\dfrac{0{,}12}{0{,}24}=\dfrac{1}{2}=0{,}5.$

73 **Réponse A.**

$P_B(D)=\dfrac{P(D\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}18}{0{,}6}=\dfrac{3}{10}=0{,}3.$

74 **Réponses A et B.**

E est l'événement contraire de $C\cup D$, ainsi :

$$P(C\cup D)=1-P(E)=P(\bar{E}).$$

D'autre part, $P(A\cap D)=P(A)\times P_A(D)=0{,}4\times 0{,}6=0{,}24$.

Ainsi, $P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)=0{,}24+0{,}18=0{,}42$.

D'où $P(C\cup D)=P(C)+P(D)=0{,}24+0{,}42=0{,}66$.

75 **Réponse C.**

Si A et B sont indépendants, on a :

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B).$$

Les autres réponses ne sont pas toujours vraies, en effet :

– si $P(A)$ et $P(B)$ sont non nuls, on ne peut pas avoir $P(A\cap B)=0$ ni de ce fait $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;

– d'autre part, pour avoir $P_B(A)=P_A(B)$, il faut que $P(A)=P(B)$.

76 **Réponses A et B.**

D'après la propriété du cours, si A et B sont indépendants, $\bar{A}$ et B, ainsi que A et $\bar{B}$, le sont aussi.

Les autres réponses ne sont pas toujours vraies, en effet :

– A et $\bar{A}$ ne sont pas indépendants, sauf si $P(A)\times P(\bar{A})=0$;

– A et $A\cap B$ ne sont pas indépendants, sauf si $P(A)=1$.

77 **Réponses B et C.**

$P(B)=1-P(\bar{B})=0{,}6.$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0{,}35\times 0{,}6=0{,}21.$

$P(A\cap \bar{B})=P(A)\times P(\bar{B})=0{,}35\times 0{,}4=0{,}14\neq 1-P(A\cap B).$

78 **Réponses A et D.**

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0{,}7\times 0{,}2=0{,}14.$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}7+0{,}2-0{,}14=0{,}76.$

$P_A(B)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{0{,}14}{0{,}7}=0{,}2.$

79 **Réponse C.**

On a : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$

$0{,}65=0{,}3+P(B)-0{,}3\times P(B)$

$0{,}65-0{,}3=0{,}7\times P(B)$ soit $P(B)=\dfrac{0{,}35}{0{,}7}=0{,}5.$

80 **Réponse C.**

On a : $P(\bar{A})=1-0{,}75=0{,}25$, $P(\bar{B})=1-0{,}6=0{,}4$

et $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\times P(\bar{B})=0{,}25\times 0{,}4=0{,}1.$

Alors : $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\cap\bar{B})$

$P(\bar{A}\cup\bar{B})=0{,}25+0{,}4-0{,}1=0{,}55.$